

解の個数問題と合成関数

例題

a を定数とするとき、実数 x の方程式

$$\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 - 2\log_2(x^2 + \sqrt{2}) + a = 0 \text{ の解の個数を求めよ。}$$

1997 年度センター本試験改

方針

与式より $a = -\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 + 2\log_2(x^2 + \sqrt{2})$ だから、

$$\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 - 2\log_2(x^2 + \sqrt{2}) + a = 0 \text{ の解の個数を求めることと}$$

xy 座標平面上において

$$y = a \text{ と } y = -\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 + 2\log_2(x^2 + \sqrt{2}) \text{ との交点の個数を求めることは同じである。}$$

しかし、 $y = -\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 + 2\log_2(x^2 + \sqrt{2})$ を座標平面上に表すのは大変である。

そこで、 $y = -\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 + 2\log_2(x^2 + \sqrt{2})$ を 3 つの関数の合成関数と見なし、

3 つの関数のグラフを座標軸を共有させながら描いた後、

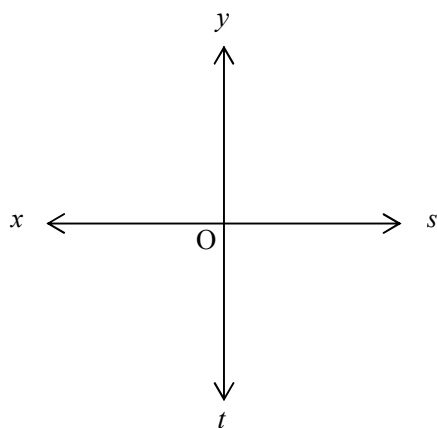
各グラフ上の点を対応づけながら、解の個数を調べる。

たとえば、 x の関数 y を $y = f(s)$, $s = g(t)$, $t = h(x)$ の合成関数と見なすと、

$y = f(g(h(x)))$ と表せる。

t は $h(x)$ の定義域かつ $g(t)$ の値域、 s は $g(t)$ の値域かつ $f(s)$ の定義域だから、

t 軸を $h(x)$ と $g(t)$ の間で、 s 軸を $g(t)$ と $f(s)$ の間で共有させてグラフを描く。



解法

手順 1

$\log_2(x^2 + \sqrt{2}) = s$ とおき, $y = f(s) = -s^2 + 2s$ とする。

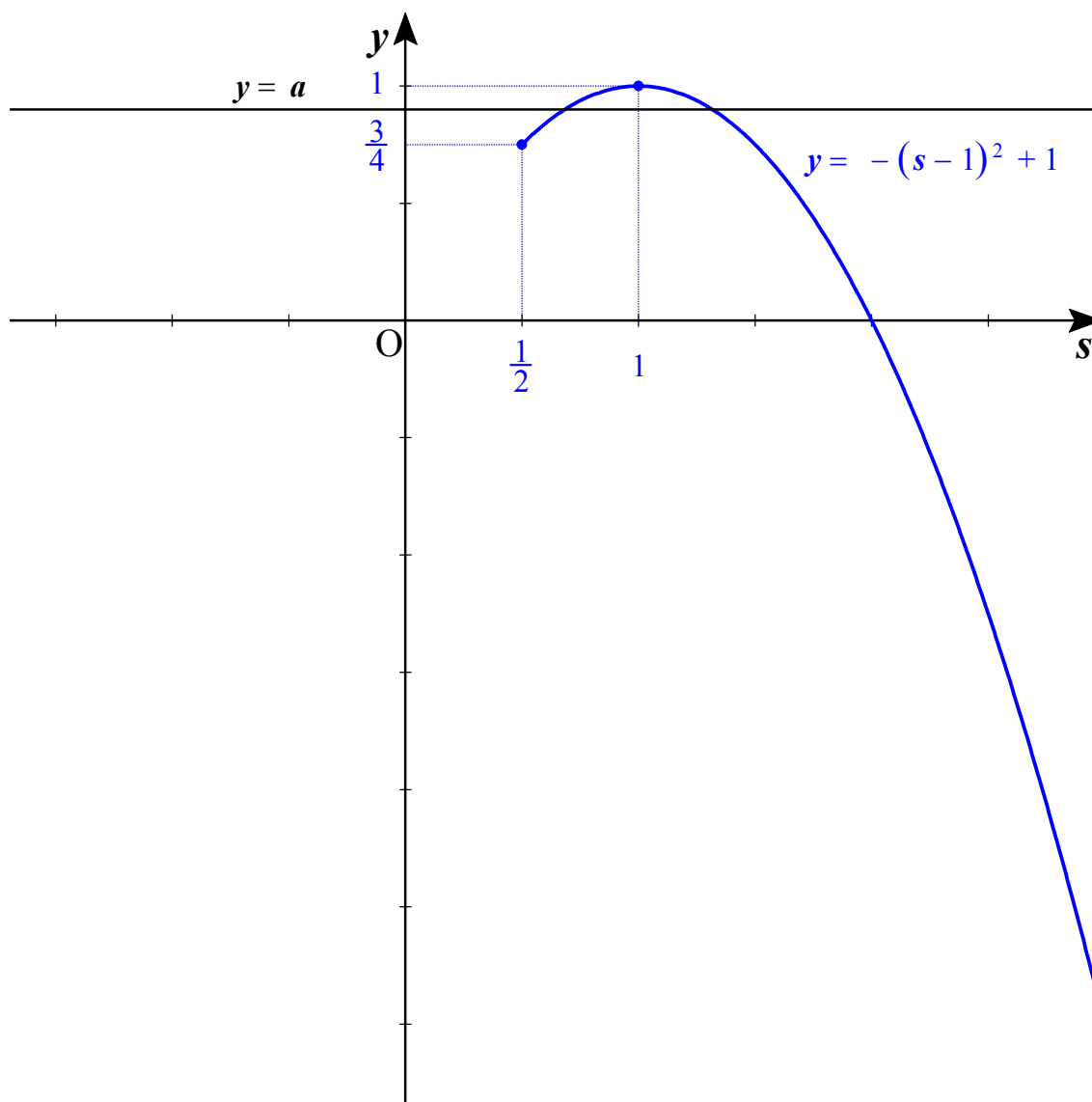
$0 \leq x^2$ だから, 定義域 $s \geq \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ である。

以上をまとめると, $y = f(s) = -s^2 + 2s = -(s-1)^2 + 1 \quad \left(\frac{1}{2} \leq s\right)$

これと $y = a$ との交点より,

$\{\log_2(x^2 + \sqrt{2})\}^2 - 2\log_2(x^2 + \sqrt{2}) + a = 0$ が解をもつためには, $a \leq 1$ であればよい。

グラフ A



手順 2

$x^2 + \sqrt{2} = t$ とおき, $s = g(t) = \log_2 t$ とする。

$0 \leq x^2$ だから, 定義域 $t \geq \sqrt{2}$ である。

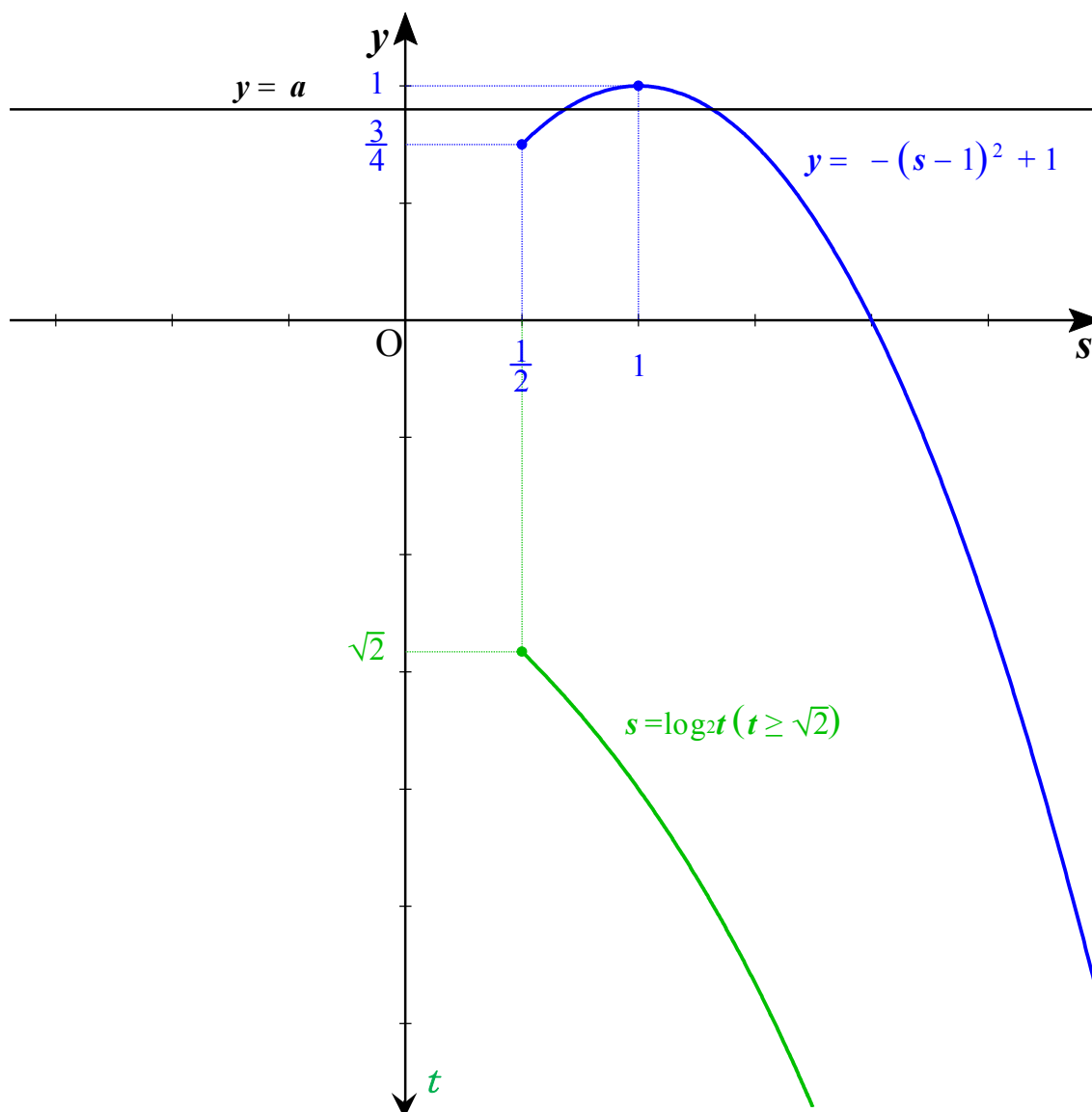
以上をまとめると,

$$s = g(t) = \log_2 t \quad (t \geq \sqrt{2})$$

この関数をグラフ A に描き足すとき,

s 軸 (値域の座標軸) が横軸右向きだから, t 軸 (定義域の座標軸) を縦軸下向きにとる。

グラフ B



手順 3

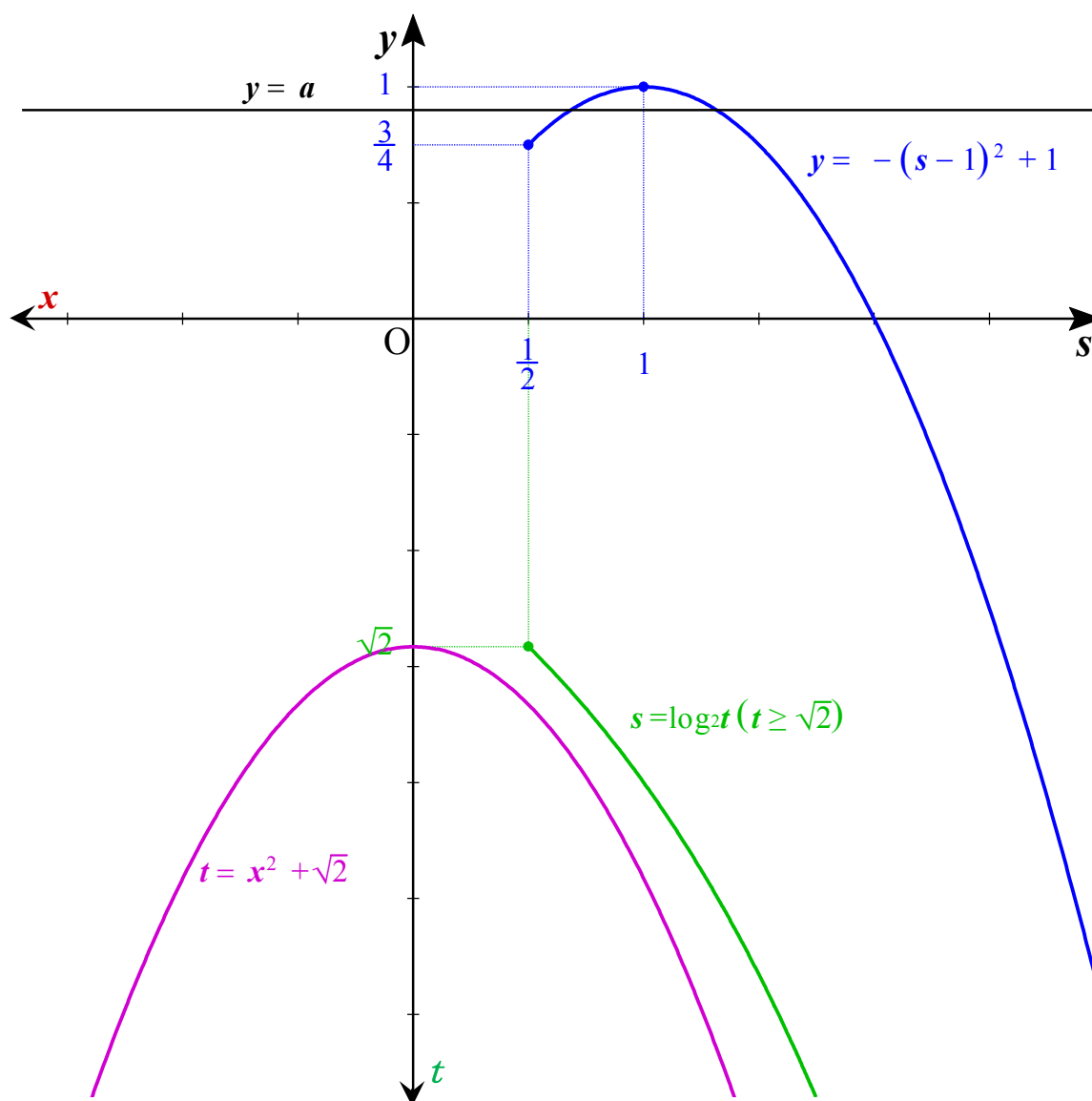
手順 2 の $x^2 + \sqrt{2} = t$ を $t = h(x) = x^2 + \sqrt{2}$ とする。

定義域 x は実数全体である。

この関数をグラフ B に描き足すとき、

t 軸 (値域の座標軸) が縦軸下向きだから、 x 軸 (定義域の座標軸) を横軸左向きにとる。

グラフ C



手順 4

各グラフの点を対応づけることで解の個数を求める。

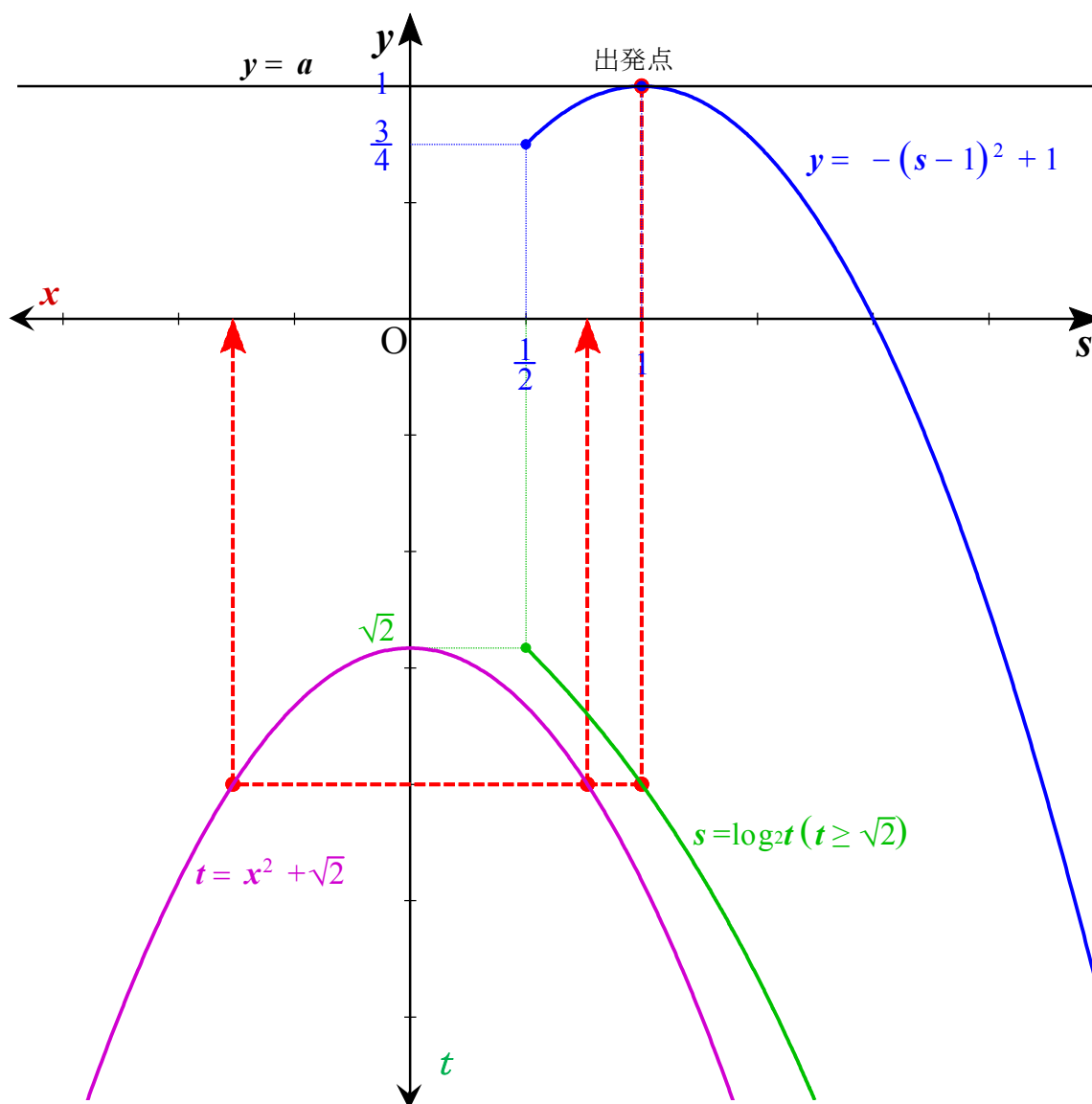
尚，赤色矢印の位置は解 x を表す。

$1 < a$ のとき

解の個数は 0

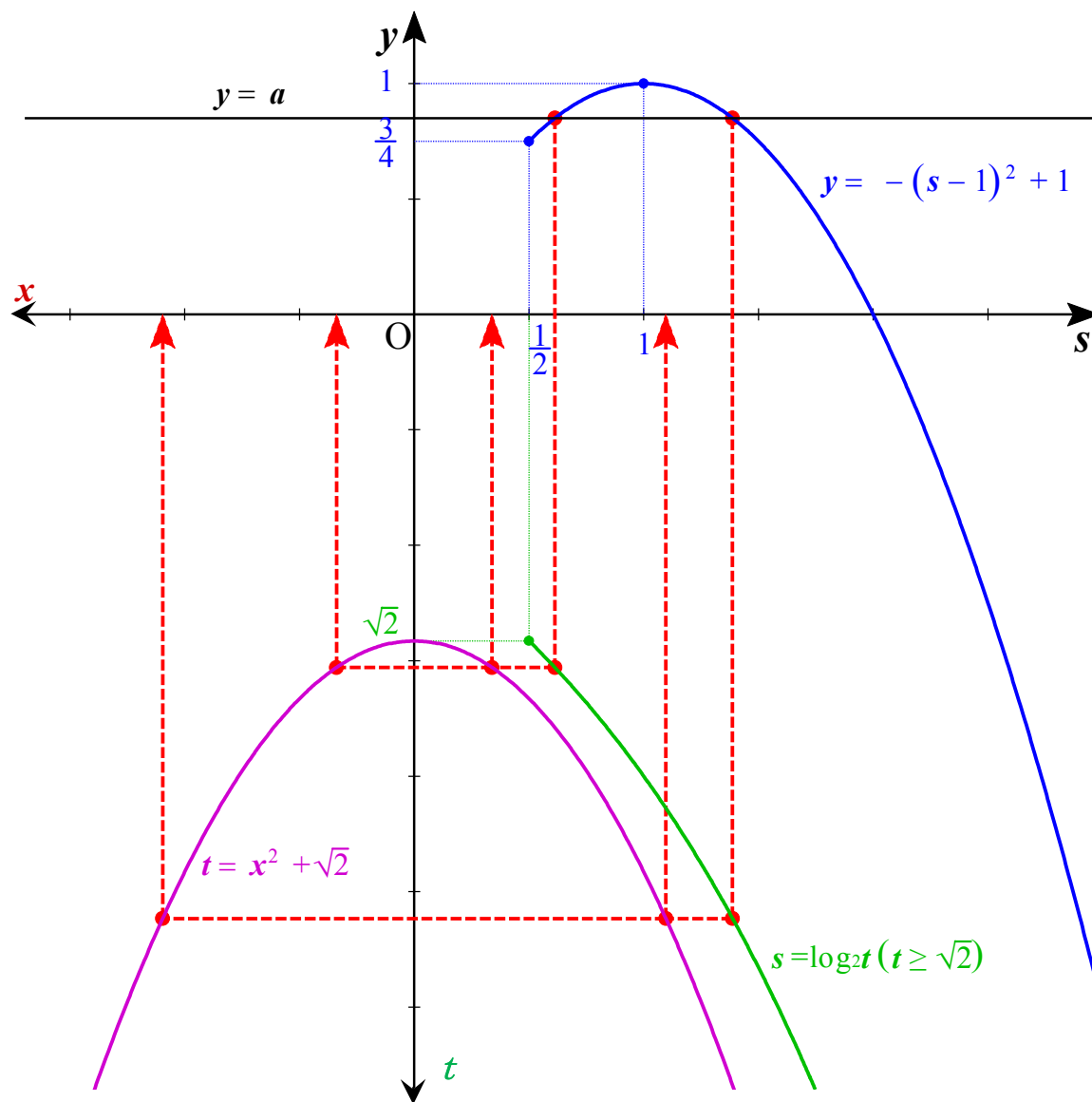
$a = 1$ のとき

解の個数は 2



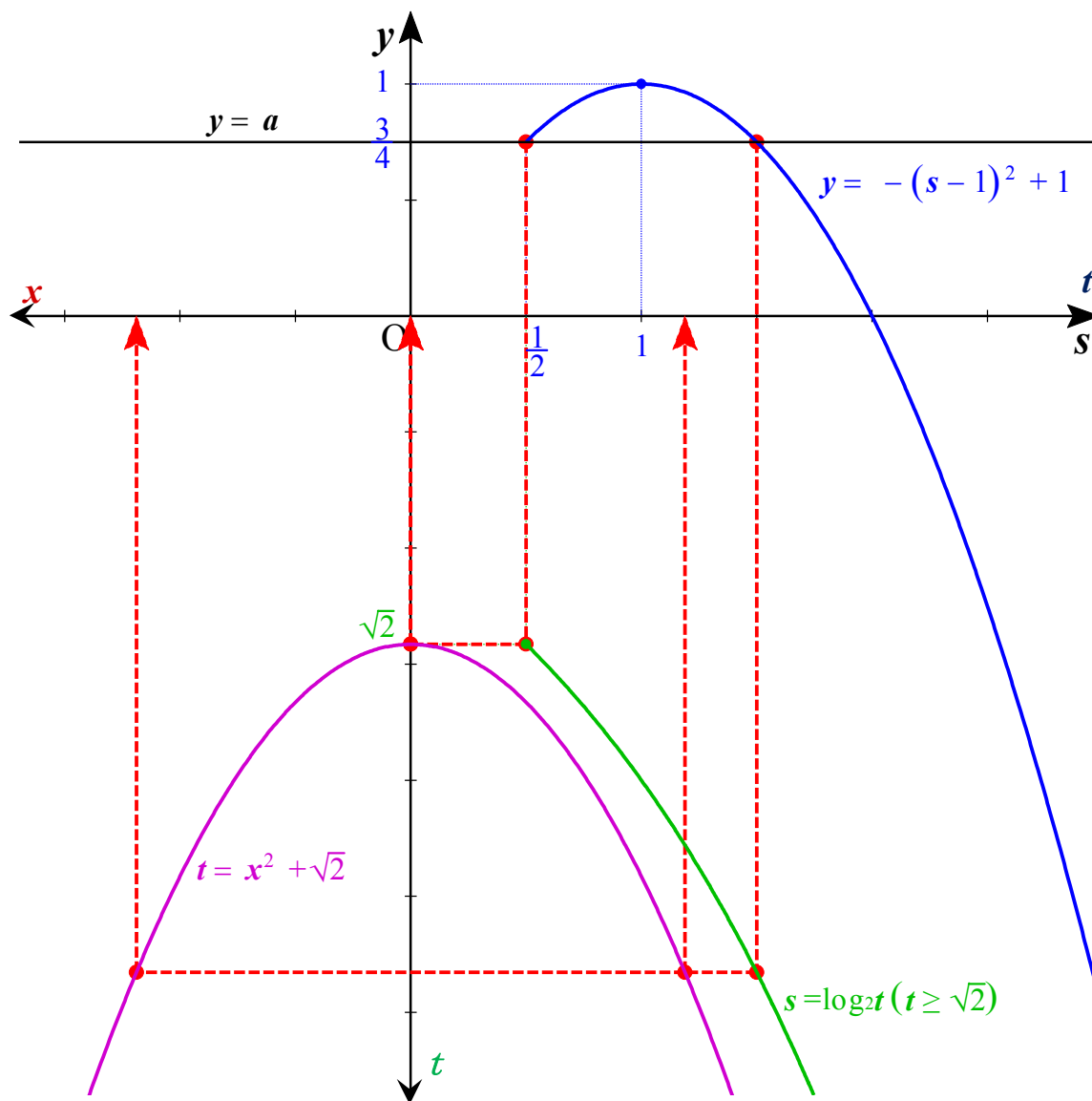
$\frac{3}{4} < a < 1$ のとき

解の個数は 4



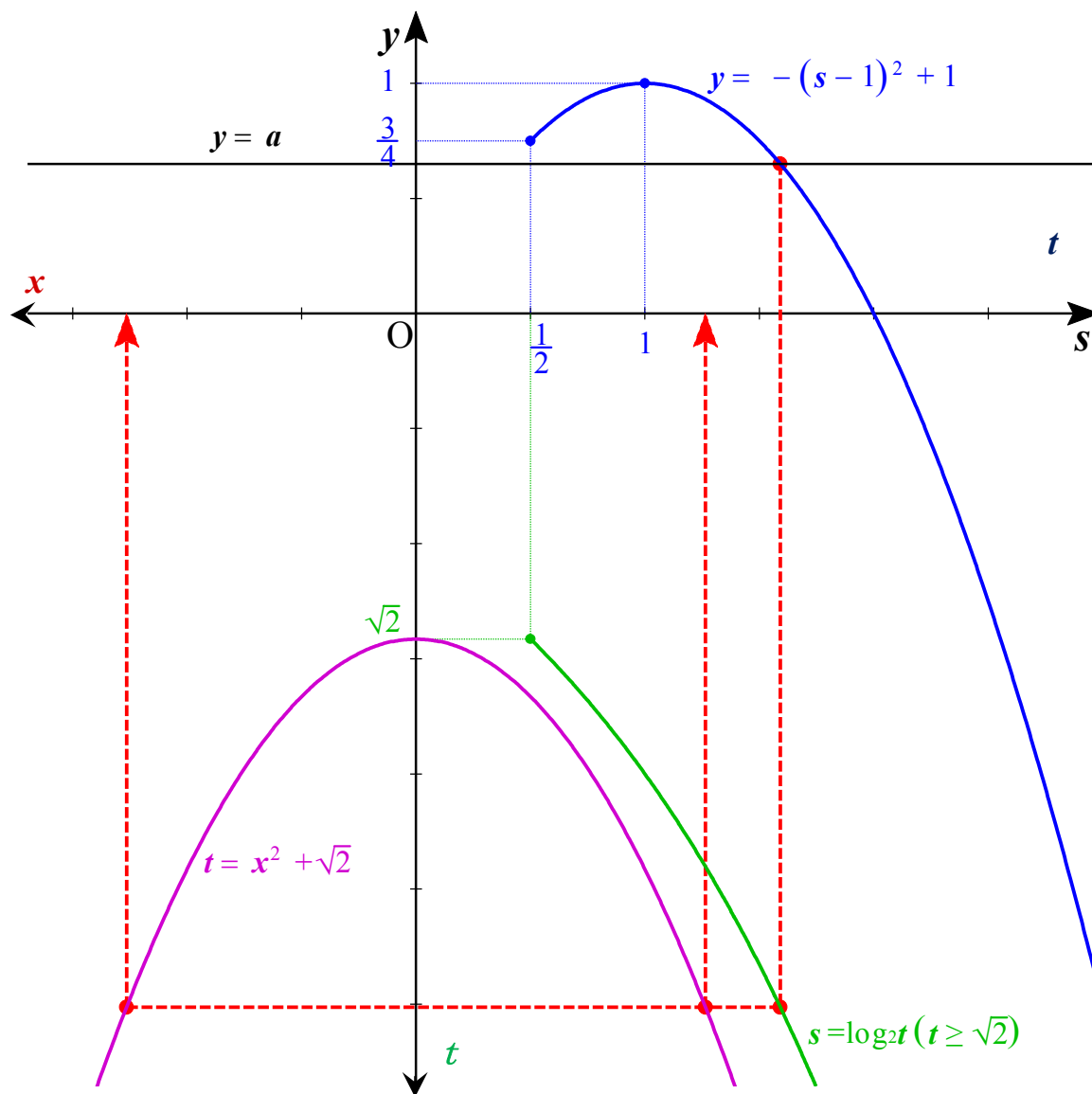
$$a = \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

解の個数は 3



$a < \frac{3}{4}$ のとき

解の個数は 2



以上をまとめると、

a の範囲	解の個数
$1 < a$	0
$a = 1$	2
$\frac{3}{4} < a < 1$	4
$a = \frac{3}{4}$	3
$a < \frac{3}{4}$	2

補足

